VISIT…

LANZAROTE
Caliente.com

4.3. Răspunsul dinamic al sistemelor MGLD

4.3.1. Analiza modală

Ecuația de mişcare a unui sistem MGLD amortizat acționat de forțe dinamice este:

$$[m]\{\ddot{u}\}+[c]\{\dot{u}\}+[k]\{u\}=\{p(t)\} \tag{4.82}$$

După cum s-a menționat în capitolul 4.2.4, vectorul $\{u\}$ al deplasărilor unui sistem MGLD poate fi dezvoltat prin contribuțiile modurilor proprii de vibrație:

$$\{u\}=\sum_{r=1}^{N}\{\phi\}_r q_r=[\Phi]\{q\} \tag{4.83}$$

Înlocuind ecuația (4.83) în (4.82) obținem:

$$\sum_{r=1}^{N}[m]\{\phi\}_r \ddot{q}_r(t)+\sum_{r=1}^{N}[c]\{\phi\}_r \dot{q}_r(t)+\sum_{r=1}^{N}[k]\{\phi\}_r q_r(t)=\{p(t)\} \tag{4.84}$$

Înmulțind fiecare termen al ecuației (4.84) la stânga cu $\{\phi\}_n^T$, obținem:

$$\sum_{r=1}^{N}\{\phi\}_n^T[m]\{\phi\}_r \ddot{q}_r(t)+\sum_{r=1}^{N}\{\phi\}_n^T[c]\{\phi\}_r \dot{q}_r(t)+\sum_{r=1}^{N}\{\phi\}_n^T[k]\{\phi\}_r q_r(t)=\{\phi\}_n^T\{p(t)\} \tag{4.85}$$

Folosind proprietatea de ortogonalitate a modurilor proprii de vibrație (vezi capitolul 4.2.2), în cazul amortizării clasice (matricea de amortizare [c] simetrică), această ecuație se reduce la:

$$M_n\ddot{q}_n(t)+C_n\dot{q}_n(t)+K_nq_n(t)=P_n(t) \tag{4.86}$$

unde M_n, C_n şi K_n sunt date de relațiile (4.38) şi (4.66). Ecuația (4.86) este valabilă pentru fiecare mod propriu $n=1, 2, \ldots, N$, iar setul de N ecuații poate fi scrisă în formă matriceală:

$$[M][\ddot{q}]+[C][\dot{q}]+[K][q]=\{P(t)\} \tag{4.87}$$

Împărțind ecuația (4.86) la M_n obținem:

$$\ddot{q}_n+2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n+\omega_n^2q_n=\frac{P_n(t)}{M_n} \tag{4.88}$$

unde ζ_n este fracțiunea din amortizarea critică în modul propriu n, iar ω_n este pulsația proprie de vibrație în modul n. În ecuațiile (4.86) şi (4.88) mărimile M_n, C_n, K_n şi $P_n(t)$ depind doar de modul propriu n. Astfel, rezolvarea sistemului de N ecuații diferențiale neomogene (4.82) a fost redus la rezolvarea a N ecuații diferențiale neomogene (4.88). În plus, folosind ecuația (4.88), nu este necesară estimarea directă a matricei de amortizare $[c]$ şi nici a elementelor matricei de amortizare modală $[C]$. În schimb, amortizarea se specifică direct prin fracțiunea de amortizare critică ζ_n pentru fiecare mod propriu de vibrație.

Ecuații de mişcare (4.88) are aceiaşi formă ca şi ecuația de mişcare a unui sistem SGLD (vezi capitolul 2.3), astfel încât pot fi folosite oricare dintre metodele de rezolvare amintite în acest capitol (rezolvarea directă a ecuației diferențiale, integrala Duhamel, metode numerice). Soluția ecuației de mişcare în modul n este coordonata modală $q_n(t)$. După cum se poate observa din ecuația (4.83), contribuția modului propriu n la deplasările totale $\{u(t)\}$ este:

$$\{u(t)\}_n=\{\phi\}_n q_n(t) \tag{4.89}$$

După ce se cunosc coordonatele modale $q_n(t)$ pentru toate modurile proprii de vibrație, deplasările totale se pot determina însumând contribuțiile individuale. Astfel, vectorul deplasărilor totale este dat de relația:

$$\{u(t)\} = \sum_{n=1}^{N} \{u(t)\}_n = \sum_{n=1}^{N} \{\phi\}_n q_n(t) \tag{4.90}$$

Această metodă de analiză este cunoscută sub denumirea de **analiză modală** şi este valabilă numai pentru sisteme liniar elastice şi amortizare clasică.

Eforturile interne în elementele structurii la momentul t pot fi determinate folosind deplasările $\{u(t)\}$ prin două metode. În prim dintre acestea se determină contribuţiile $r_n(t)$ din modul propriu de vibraţie n ale efortului $r(t)$, folosind deplasările impuse $\{u(t)\}_n$, după care eforturile totale se obţin prin însumarea contribuţiilor din toate modurile proprii:

$$r(t) = \sum_{n=1}^{N} r_n(t) \tag{4.91}$$

În cea de-a doua metodă se determină forţele statice echivalente din modul propriu de vibraţie n: $\{f(t)\}_n = [k]\{u(t)\}_n$. Înlocuind în această expresie ecuaţia (4.89) şi folosind expresia (4.25) obţinem:

$$\{f(t)\}_n = \omega_n^2 [m]\{\phi\}_n q_n(t) \tag{4.92}$$

Analiza statică a structurii sub efectul acestor forţe permite calculul contribuţiilor $r_n(t)$ din modul propriu de vibraţie n. Eforturile totale $r(t)$ se determină folosind ecuaţia (4.91).

În concluzie, analiza modală a unui sistem MGLD acţionat de forţele dinamice $\{p(t)\}$ poate fi efectuată în următoarea ordine:

1. Se definesc proprietăţile structurale
   - matricele masei $[m]$ şi ale rigidităţii $[k]$
   - fracţiunea din amortizarea critică ζ_n
2. Se determină pulsaţiile proprii de vibraţie ω_n şi modurile proprii de vibraţie $\{\phi\}_n$
3. Se calculează răspunsul în fiecare mod propriu urmărind secvenţa:
   - se formulează ecuaţia de mişcare (4.88)
   - se calculează deplasările $\{u(t)\}_n$ folosind ecuaţia (4.89)
   - se calculează contribuţiile $r_n(t)$ din modul propriu de vibraţie n ale eforturilor, folosind una dintre metodele descrise mai sus
4. Se combină răspunsurile modale pentru a obţine răspunsul total. Deplasările totale se obţin din ecuaţia (4.90), iar eforturile toatele din ecuaţia (4.91)

În general doar primele câteva moduri proprii de vibraţie contribuie semnificativ la răspunsul total al structurii. De aceea, paşii de la punctul (3) se efectuează în mod curent doar pentru primele câteva moduri proprii de vibraţie.

4.3.2. Analiza răspunsului seismic în timp folosind analiza modală

Ecuaţia de mişcare a unui sistem MGLD amortizat acţionat de mişcarea seismică este dată de:

$$[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = \{p_{eff}(t)\} \tag{4.93}$$

unde

$$\{p_{eff}(t)\} = -[m]\{1\}\ddot{u}_g(t) \tag{4.94}$$

Ţinând cont de faptul că răspunsul unui sistem MGLD supus mişcării seismice la baza structurii este identic cu răspunsul dinamic al aceluiaşi sistem MGLD acţionat de forţele efective date de ecuaţia (4.94), metoda de analiză modală descrisă în capitolul 4.3.1 pentru forţe dinamice este aplicabilă şi în cazul acţiunii seismice.

Un exemplu al unui sistem MGLD este prezentat în Figura 4.17. Gradele de libertate dinamică sunt deplasările laterale relative u_j, $j=1, 2, \ldots, N$, unde N reprezintă numărul de nivele, respectiv numărul gradelor de libertate. Matricea maselor $[m]$ este o matrice diagonală cu elementele $m_{jj}=m_j$.

Distribuția în spațiu a forțelor efective $\{p_{eff}(t)\}$ este dată de expresia $\{s\}=[m]\{1\}$, care este independentă de timp. Vectorul $\{s\}$ poate fi dezvoltat folosind următoarea expresie:

$$\{s\} = [m]\{1\} = \sum_{r=1}^{N}\{s\}_r = \sum_{r=1}^{N}\Gamma_r [m]\{\phi\}_r \tag{4.95}$$

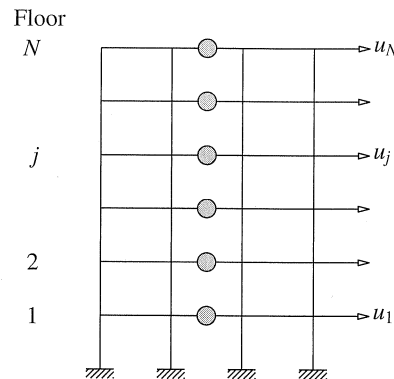


Figura 4.17. Gradele de libertate dinamice ale unui cadru multietajat: deplasările laterale (Chopra, 2001).

Înmulțind ambele părți ecuației (4.95) cu $\{\phi\}_n^T$ și folosind proprietate de ortogonalitate a modurilor proprii de vibrație, obținem:

$$\{\phi\}_n^T [m]\{1\} = \Gamma_n \{\phi\}_n^T [m]\{\phi\}_n \tag{4.96}$$

de unde:

$$\Gamma_n = \frac{\{\phi\}_n^T [m]\{1\}}{\{\phi\}_n^T [m]\{\phi\}_n} = \frac{\{\phi\}_n^T [m]\{1\}}{M_n} \tag{4.97}$$

Astfel, se pot scrie următoarele expresii:

$$\Gamma_n = \frac{L_n}{M_n} \qquad L_n = \{\phi\}_n^T [m]\{1\} = \sum_{j=1}^{N} m_j \phi_{jn} \qquad M_n = \{\phi\}_n^T [m]\{\phi\}_n = \sum_{j=1}^{N} m_j \phi_{jn}^2 \tag{4.98}$$

unde ϕ_{jn} reprezintă deplasarea modală pe direcția gradului de libertate j (deplasarea laterală la nivelul j) în modul propriu de vibrație n.

Pe baza relației (4.95), contribuția modului propriu de vibrație n la $[m]\{1\}$ este dată de:

$$\{s\}_n = \Gamma_n [m]\{\phi\}_n \qquad s_{jn} = \Gamma_n m_j \phi_{jn} \tag{4.99}$$

distribuție care este independentă de modul în care sunt normalizate modurile proprii de vibrație.

În cazul unui sistem MGLD supus unei mişcări seismice, ecuația (4.88) devine:

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -\Gamma_n \ddot{u}_g(t) \tag{4.100}$$

Ecuația de mişcare (3.2) pentru un sistem SGLD supus acțiunii seismice poate fi exprimată în următoarea formă:

$$\ddot{D}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{D}_n + \omega_n^2 D_n = -\ddot{u}_g(t) \tag{4.101}$$

unde s-a înlocuit deplasarea u a sistemului SGLD cu notația D_n pentru a evidenția relația acesteia cu modul propriu de vibrație n. În mod similar, ζ a fost înlocuită cu ζ_n, iar ω cu ω_n. Ecuația de mişcare (4.101) poate fi rezolvată folosind metodele numerice amintite în capitolul 3. Soluția $q_n(t)$ a ecuației de mişcare a sistemului MGLD în modul propriu n poate fi obținută observând asemănarea dintre ecuația (4.100) şi ecuația de mişcare (4.101) a unui sistem SGLD. Comparând cele două ecuații:

$$q_n(t) = \Gamma_n D_n(t) \tag{4.102}$$

Coeficientul Γ_n se numeşte coeficient de participare modală. Totuşi, acesta nu reprezintă contribuţia modului n la răspunsul total al unei mărimi. În plus, valoarea factorului de participare modală nu este independentă de metoda de normalizare a modurilor proprii de vibraţie.

Contribuţia modului propriu n la deplasarea totală $\{u(t)\}$ este:

$$\{u(t)\}_n = \{\phi\}_n q_n(t) = \Gamma_n \{\phi\}_n D_n(t) \quad \text{sau} \quad u_{jn}(t) = \Gamma_n \phi_{jn} D_n(t) \tag{4.103}$$

Dintre cele două metode de determinare a eforturilor în elementele structurale descrise în capitolul 4.3.1, de obicei se preferă metoda forţelor statice echivalente, fiind mai intuitivă. Forţele statice echivalente din modul propriu n sunt $\{f(t)\}_n = [k]\{u(t)\}_n$, unde $\{u(t)\}_n$ sunt determinate din relaţia (4.103). Folosind expresiile (4.25) şi (4.99), forţele statice echivalente pot fi exprimate prin:

$$\{f(t)\}_n = \{s\}_n A_n(t) \quad \text{sau} \quad f_{jn}(t) = s_{jn} A_n(t) \tag{4.104}$$

unde, similar expresiei (3.9),

$$A_n(t) = \omega_n^2 D_n(t) \tag{4.105}$$

Relaţia (4.104) indică faptul că forţele statice echivalente sunt produsul a doi factori: (1) contribuţia $\{s\}_n$ a modului propriu n la distribuţia $[m]\{1\}$ a forţelor efective $\{p_{eff}(t)\}$ şi (2) răspunsul în pseudo-acceleraţie al unui sistem SGLD corespunzător modului propriu n la mişcarea seismică $\ddot{u}_g(t)$.

Contribuţia $r_n(t)$ din modul propriu n al oricărui răspuns $r(t)$ se determină prin analiza statică a structurii din forţele $f_n(t)$. Folosind ecuaţia (4.104), mărimea $r_n(t)$ se poate exprima prin relaţia:

$$r_n(t) = r_n^{st} A_n(t) \tag{4.106}$$

unde s-a notat prin r_n^{st} răspunsul static modal, generat de "forţele" $\{s\}_n$. Se poate observa că r_n^{st} poate lua atât valori pozitive, cât şi negative, şi nu depinde de metoda de normalizare a modurilor proprii.

Răspunsul total se obţine însumând contribuţiile răspunsului în toate modurile proprii. Astfel, folosind expresia (4.103), deplasările nodale vor fi:

$$\{u(t)\} = \sum_{n=1}^{N} \{u(t)\}_n = \sum_{n=1}^{N} \Gamma_n \{\phi\}_n D_n(t) \tag{4.107}$$

Folosind ecuaţia (4.106), răspunsul total al oricărei mărimi este dat de relaţia:

$$r(t) = \sum_{n=1}^{N} r_n(t) = \sum_{n=1}^{N} r_n^{st} A_n(t) \tag{4.108}$$

Interpretarea analizei modale

Analiza răspunsului seismic în timp folosind analiza modală începe prin a determina pulsaţiile proprii şi modurile proprii de vibraţie. Odată acestea cunoscute, pentru fiecare mod propriu se determină componentele modale $\{s\}_n$ ale distribuţiei vectorului forţelor $[m]\{1\}$, folosind relaţia (4.99). Restul procedurii unei analize modale este prezentată conceptual în Figura 4.18. Contribuţia din modul propriu n a răspunsului dinamic se obţine înmulţind rezultatele a două analize: (1) o analiză statică a structurii din forţele $\{s\}_n$ şi (2) o analiză dinamică a unui sistem SGLD corespunzător modului propriu n acţionat de mişcarea seismică $\ddot{u}_g(t)$. Astfel, analiza modală necesită efectuarea a N analize statice din forţele $\{s\}_n$, $n=1, 2, \ldots, N$ şi analize dinamice a N sisteme SGLD. Răspunsul total se obţine combinând răspunsul în fiecare mod propriu.

Analiza răspunsului seismic în timp folosind analiza modală a unui sistem MGLD poate fi efectuată în următoarea ordine:

1. Se defineşte numeric acceleraţia terenului $\ddot{u}_g(t)$ la intervalul de digitizare Δt

2. Se definesc proprietățile structurale
   - matricele masei $[m]$ şi ale rigidității $[k]$
   - fracțiunea din amortizarea critică ζ_n
3. Se determină pulsațiile proprii de vibrație ω_n şi modurile proprii de vibrație $\{\phi\}_n$
4. Se determină componentele modale $\{s\}_n$ ale distribuției forțelor seismice efective
5. Se calculează răspunsul în fiecare mod propriu urmărind secvența:
   - se calculează răspunsul static r_n^{st} al structurii din forțele $\{s\}_n$, pentru fiecare cantitate de răspuns dorită
   - se calculează pseudo-accelerația $A_n(t)$ a sistemului SGLD corespunzător modului propriu n acționat de mişcarea seismică $\ddot{u}_g(t)$ folosind metode numerice
   - se calculează contribuțiile $r_n(t)$ din modul propriu de vibrație n ale eforturilor, folosind relația (4.106)
6. Se combină contribuțiile modale $r_n(t)$ pentru a obține răspunsul total folosind relația (4.108).

Mode	Static Analysis of Structure	Dynamic Analysis of SDF System	Modal Contribution to Dynamic Response
1	Forces $\mathbf{s}_1$; r_1^{st}	$A_1(t)$; ω_1, ζ_1; $\ddot{u}_g(t)$	$r_1(t) = r_1^{st} A_1(t)$
2	Forces $\mathbf{s}_2$; r_2^{st}	$A_2(t)$; ω_2, ζ_2; $\ddot{u}_g(t)$	$r_2(t) = r_2^{st} A_2(t)$
• • •	• • •	• • •	• • •
N	Forces $\mathbf{s}_N$; r_N^{st}	$A_N(t)$; ω_N, ζ_N; $\ddot{u}_g(t)$	$r_N(t) = r_N^{st} A_N(t)$
Total response			$r(t) = \sum_{n=1}^{N} r_n(t)$

Figura 4.18. Explicarea conceptuală a analizei modale (Chopra, 2001).

Masa modală efectivă şi înălţimea modală

În cazul unei structuri multietajate în cadre, este utilă introducerea a două mărimi ale răspunsului: forţa tăietoare la bază V_b şi momentul la bază M_b. Răspunsul static modal pentru aceste mărimi este dat de relaţiile (vezi Figura 4.19):

$$V_{bn}^{st} = \sum_{j=1}^{N} s_{jn} = \Gamma_n L_n \equiv M_n^* \tag{4.109}$$

$$M_{bn}^{st} = \sum_{j=1}^{N} h_j s_{jn} = \sum_{j=1}^{N} h_j m_j \phi_{jn} \equiv h_n^* M_n^* \tag{4.110}$$

unde s-au folosit notaţiile:

$$M_n^* = \Gamma_n L_n = \frac{(L_n)^2}{M_n} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} m_j \phi_{jn}\right)^2}{\sum_{j=1}^{n} m_j \phi_{jn}^2} \qquad h_n^* = \frac{\sum_{j=1}^{n} h_j m_j \phi_{jn}}{L_n} = \frac{\sum_{j=1}^{n} h_j m_j \phi_{jn}}{\sum_{j=1}^{n} m_j \phi_{jn}} \tag{4.111}$$

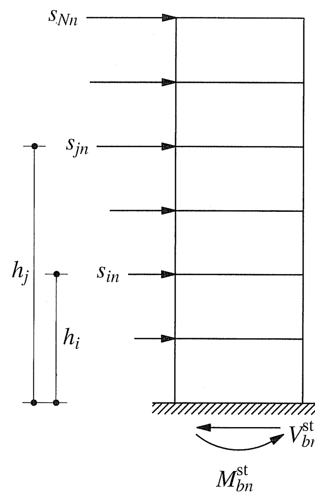


Figura 4.19. Răspunsul static modal pentru forţa tăietoare la bază şi momentul la bază (Chopra, 2001).

Pe baza ecuaţiei (4.106), forţa tăietoare la bază din modul propriu n poate fi exprimată prin:

$$V_{bn}(t) = V_{bn}^{st} A_n(t) \tag{4.112}$$

Înlocuind în această expresie relaţia (4.109)

$$V_{bn}(t) = M_n^* A_n(t) \tag{4.113}$$

Pentru un sistem SGLD cu masa m, pulsaţia proprie de vibraţie ω_n şi fracţiunea din amortizarea critică ζ_n, valoarea de vârf a forţei tăietoare la bază este $V_b = kD = mA$, care pentru timpul t devine:

$$V_b(t) = mA_n(t) \tag{4.114}$$

Comparaţia ecuaţiilor (4.113) şi (4.114) indică faptul că dacă masa sistemului SGLD ar fi M_n^*, forţa tăietoare la bază V_b a sistemului SGLD ar fi identică cu forţa tăietore la bază V_{bn} în modul propriu n a sistemului MGLD, care are masa distribuită la cele N nivele. Din acest motiv, M_n^* se numeşte **masa modală efectivă**. În cazul unui sistem SGLD întreaga sa masă m este efectivă în producerea forţei tăietoare de bază, după cum se poate vedea din relaţia (4.114). În cazul unui sistem MGLD în schimb, doar fracţiunea M_n^* a masei totale a structurii este efectivă în producerea forţei tăietoare de bază, deoarece masa este distribuită la cele N nivele ale structurii. Suma maselor modale efective din cele N moduri proprii este egală cu masa totală a structurii:

$$\sum_{n=1}^{N} M_n^* = \sum_{j=1}^{N} m_j \tag{4.115}$$

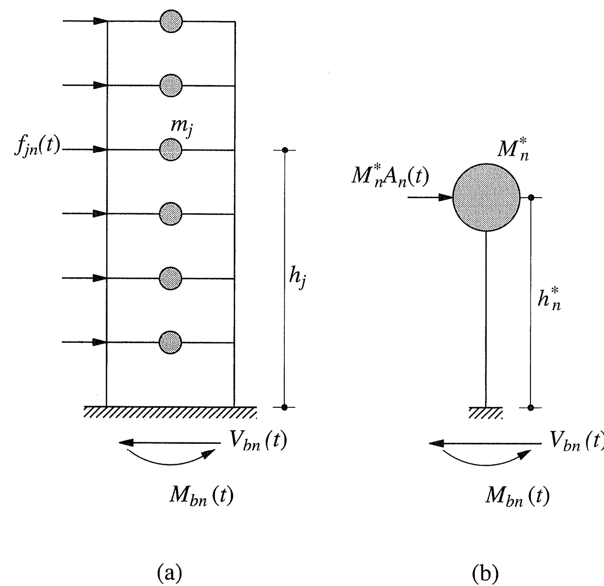


Figura 4.20. Forțele statice echivalente şi forța tăietoare la bază în modul n (a); un sistem SGLD corespunzător cu masa modală efectivă şi înălțimea modală efectivă (b), Chopra, 2001.

În mod similar, momentul la bază din modul propriu n poate fi exprimat prin:

$$M_{bn}(t) = M_{bn}^{st} A_n(t) \tag{4.116}$$

Înlocuind în această expresie relația (4.110) şi folosind expresia (4.113):

$$M_{bn}(t) = h_n^* V_{bn}(t) \tag{4.117}$$

Pentru un sistem SGLD cu masa m, pulsația proprie de vibrație ω_n şi fracțiunea din amortizarea critică ζ_n, valoarea de vârf a momentului la bază este $M_b = hV_b$, care pentru timpul t devine:

$$M_b(t) = hV_b(t) \tag{4.118}$$

Comparația ecuațiilor (4.117) şi (4.118) indică faptul că dacă masa sistemului SGLD ar fi M_n^* şi aceasta ar fi amplasată la înălțimea h_n^*, momentul la bază M_b din sistemul SGLD ar fi identic cu momentul la bază M_{bn} în modul propriu n a sistemului MGLD, care are masa distribuită la cele N nivele. Din acest motiv, h_n^* se numeşte **înălțimea modală efectivă**.

În cazul unui sistem SGLD înălțimea totală a acestuia h este efectivă în producerea momentului la bază, după cum se poate vedea din relația (4.118). În cazul unui sistem MGLD în schimb, doar înălțimea modală efectivă h_n^*, mai mică decât înălțimea totală a structurii este efectivă în producerea momentului la bază, deoarece masa, respectiv forțele statice echivalente sunt distribuite la cele N nivele ale structurii. Suma momentelor statice ale maselor modale efective M_n^* din cele N moduri proprii este egală cu masa totală a structurii amplasate la înălțimile h_n^* este egală cu suma momentelor statice ale maselor structurii amplasate la nivelul etajelor:

$$\sum_{n=1}^{N} h_n^* M_n^* = \sum_{j=1}^{N} h_j m_j \tag{4.119}$$

4.3.3. Analiza spectrală

Răspunsul seismic în timp a unui sistem MGLD poate fi determin prin intermediul analizei modale descrise în capitolul 4.3.2. În practica curentă de proiectare, dimensionarea structurilor se bazează însă pe valorile de vârf ale forțelor şi deplasărilor seismice. În cele ce urmează se va prezenta o

metodă de determinare directă a valorilor de vârf a răspunsului seismic al sistemelor MGLD, folosind analiza spectrală.

Răspunsul de vârf r_{no} al contribuției $r_n(t)$ din modul propriu de vibrație n al răspunsului $r(t)$ se poate obține dintr-un spectru de răspuns. Acest fapt este evident din ecuația (4.106), valoarea de vârf A_n a pseudo-accelerației $A_n(t)$ reprezentând ordonata spectrală din spectrul de pseudo-accelerație corespunzătoare perioadei T_n şi fracțiunii din amortizarea critică ζ_n. Astfel:

$$r_{n0} = r_n^{st} A_n \qquad (4.120)$$

Semnul algebric al r_{n0} este acelaşi cu semnul r_n^{st}, deoarece A_n este pozitivă prin definiție.

În Figura 4.21 sunt prezentate contribuțiile modale şi valorile totale ale forței tăietoare la bază şi forței tăietoare la nivelul 5 al unui cadru cu 5 nivele, determinate printr-o analiză modală. Răspunsul de vârf al contribuțiilor modale $V_{bn}(t)$ se înregistrează în general la momente diferite de timp, la fel şi valoarea de vârf a răspunsului total $V_n(t)$. Din această cauză este dificilă obținerea răspunsului de vârf total $r_0 = \max_t |r(t)|$ pe baza răspunsului de vârf din modurile proprii n=1, 2, …, N: $r_{n0} = \max_t |r_n(t)|$. Din această cauză, se folosesc diverse aproximări prin care se determină răspunsul de vârf total r_0 pe baza răspunsurilor modale de vârf r_{n0}.

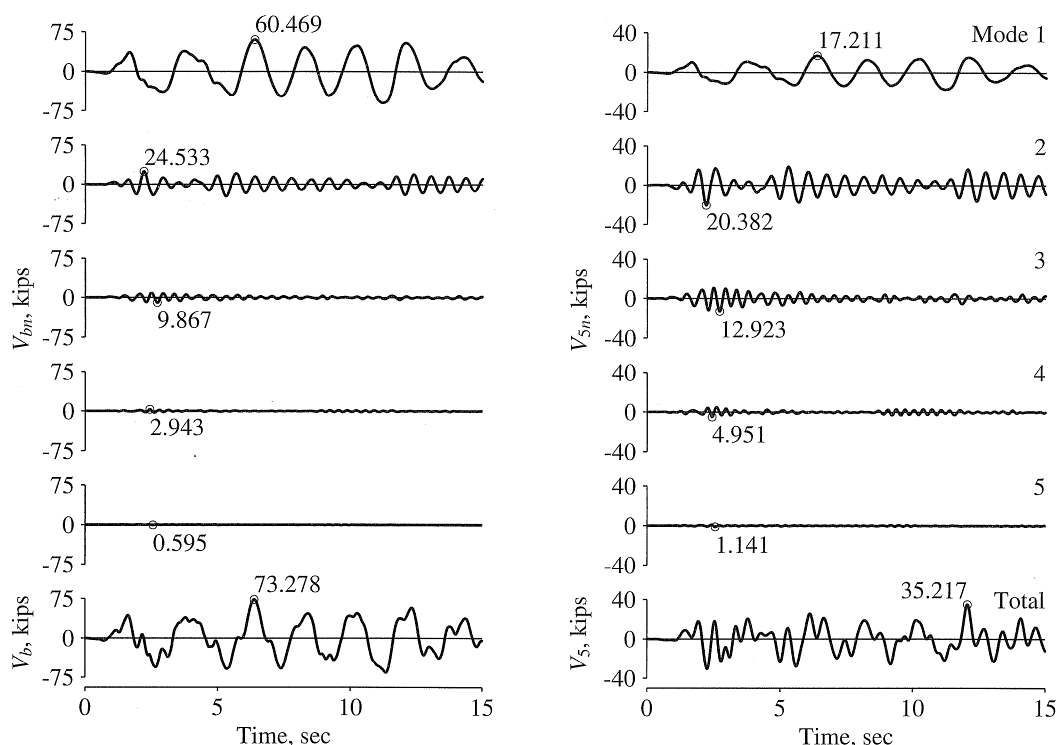


Figura 4.21. Contribuțiile modale şi valorile totale ale forței tăietoare la bază şi forței tăietoare la nivelul 5 al unui cadru cu 5 nivele, (Chopra, 2001).

Una dintre posibilități este considerarea că toate răspunsurile modale au loc la acelaşi timp şi au acelaşi semn algebric. Această ipoteză conduce la expresia:

$$r_0 = \sum_{n=1}^{N} |r_{n0}| \qquad (4.121)$$

Această metodă de combinare se numeşte **suma valorilor absolute** şi oferă o aproximare corespunzătoare a răspunsului total doar pentru structurile care au perioade proprii de vibrație apropiate ca valoare.

O altă metodă de combinare a răspunsurilor modale este **radical din suma pătratelor (RSP)**:

$$r_0 = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} r_{n0}^2} \tag{4.122}$$

Această metodă de combinare a răspunsurilor modale oferă o aproximare corespunzătoare a răspunsului total doar pentru structurile care au perioade proprii de vibraţie distincte şi suficient de diferite ca valoare.

O metodă mai flexibilă de combinare a răspunsurilor modale este metoda **combinării pătratice complete (CPC)**, aceasta fiind aplicabilă atât structurilor cu moduri proprii apropiate cât şi cu moduri proprii distincte. Expresia răspunsului de vârf în această metodă este:

$$r_0 = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \rho_{in} r_{i0} r_{n0}} \tag{4.123}$$

Fiecare termen de sub radicalul acestei relaţii reprezintă produsul dintre coeficientul de corelare ρ_{in} şi valorile de vârf ale răspunsurilor modale r_{i0} şi r_{n0}. Coeficientul de corelare variază între 0 şi 1, având valoarea unitară pentru $i=n$: $\rho_{in}=1$. Astfel, ecuaţia (4.123) devine:

$$r_0 = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} r_{n0}^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \sum_{n=1}^{N}}_{i \neq n} \rho_{in} r_{i0} r_{n0}} \tag{4.124}$$

Primul sumă e sub radical este identică cu metoda radical din suma pătratelor, iar cea de-a doua sumă include toţi termenii ($i \neq n$).

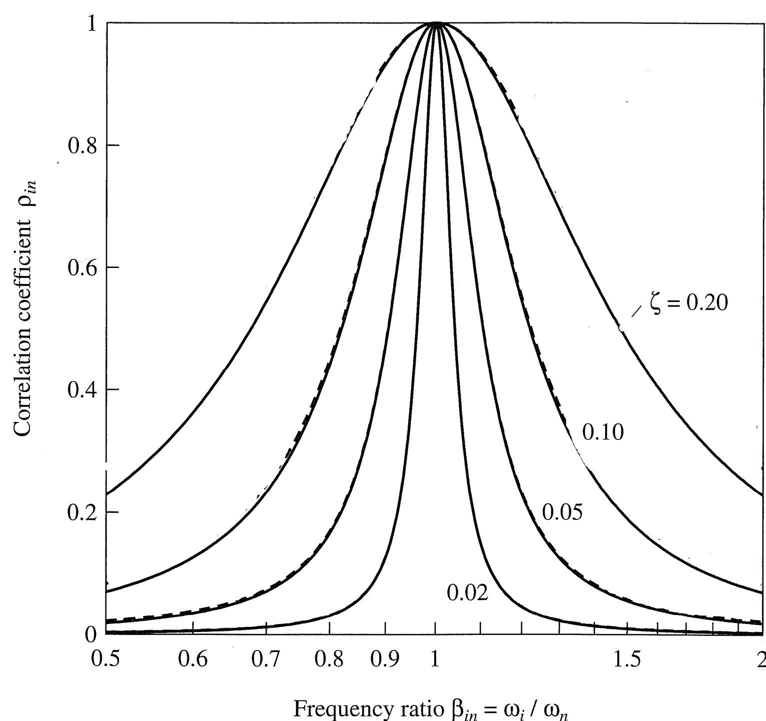


Figura 4.22. Variaţia factorului de corelare ρ_{in} funcţie de raportul pulsaţiilor modale $\beta_{in} = \omega_i / \omega_n$ (Chopra, 2001).

Variaţia factorului de corelare ρ_{in} funcţie de raportul pulsaţiilor modale $\beta_{in} = \omega_i / \omega_n$ este prezentată în Figura 4.22. Se poate observa că pentru moduri proprii distincte (cu valori $\omega_i \neq \omega_n$) factorul de corelare scade rapid odată cu creşterea raportului dintre pulsaţii, astfel încât metoda CPC se reduce la metoda RSP. În cazul în care structura are moduri proprii apropiate ($\omega_i \cong \omega_n$), factorul de corelare este apropiat de valoarea unitară, răspunsul total fiind mai mare decât cel determinat cu metoda RSP.

Metoda RSP şi CPC au la bază teoria vibraţiilor aleatoare. De aceea, aceste metode de combinare a răspunsurilor modale, cât şi metoda spectrală de determinare a răspunsului seismic a structurilor MGLD se potrivesc mişcărilor seismice cu o bandă largă de frecvenţe şi o durată lungă. Metoda spectrală nu este potrivită cutremurelor de tip puls sau a celor care au o mişcare apropiată de cea armonică. Metoda spectrală de determinare a răspunsului seismic este deosebit de utilă în proiectare, unde spectrul de pseudo-acceleraţie de calcul reprezintă o mediere şi o schematizare a mai multor mişcări seismice.

Avantajul metodei spectrale este acela că această metodă oferă răspunsul seismic de vârf al unui sistem MGLD, prin efectuarea unei serii de analize statice. Astfel, pentru fiecare mod propriu n, se efectuează o analiză statică din forţele $\{s\}_{n,}$ care oferă răspunsul modal static r_n^{st}. Înmulţind această mărime cu ordonata spectrală A_n, se obţine răspunsul modal de vârf r_{n0}. Astfel, analiza dinamică a sistemului SGLD nu mai este necesară, deoarece informaţia corespunzătoare este conţinută în spectrul de răspuns.

În analiza spectrală este utilă determinarea răspunsului modal de vârf r_{n0} direct din forţele statice echivalente:

$$\{f\}_n = \{s\}_n A_n \qquad f_{jn} = \Gamma_n m_j \phi_{jn} A_n \qquad (4.125)$$

unde $\{f\}_n$ este vectorul forţelor statice echivalente f_{jn} pe direcţia gradelor de libertate j=1, 2, …, N (deplasările orizontale la nivelele j).

Analiza spectrală a unui sistem MGLD poate fi efectuată în următoarea ordine:

1. Se definesc proprietăţile structurale
   - matricele masei $[m]$ şi ale rigidităţii $[k]$
   - fracţiunea din amortizarea critică ζ_n
2. Se determină pulsaţiile proprii de vibraţie ω_n (cu perioada proprie corespunzătoare $T_n=2\pi/\omega_n$) şi modurile proprii de vibraţie $\{\phi\}_n$
3. Se calculează răspunsul în fiecare mod propriu urmărind secvenţa:
   - pentru perioada proprie T_n şi fracţiunea din amortizarea critică ζ_n se determină din spectrul de pseudo-acceleraţie ordonata spectrală A_n
   - se calculează forţele statice echivalente $\{f\}_n$ folosind relaţia (4.125)
   - se calculează răspunsul r_n din forţele $\{f\}_n$, pentru fiecare cantitate de răspuns dorită (eforturi, deplasări, etc.)
4. Se combină contribuţiile modale r_n pentru a obţine răspunsul total folosind metoda RSP sau CPC.

În general doar primele câteva moduri proprii de vibraţie contribuie semnificativ la răspunsul total al structurii. De aceea, paşii de la punctul (3) se efectuează în mod curent doar pentru primele câteva moduri proprii de vibraţie.